



16 de fevereiro de 2006
016/2006-DG

OFÍCIO CIRCULAR

Revogado Pelo Ofício Circular nº 004-2017-DO, de 5 de junho de 2017

Membros de Compensação, Corretoras Associadas e Operadores Especiais

Ref.: Lei 11.196 – Limites de Preços e Taxas para Registro e Liquidação de Operações de Derivativos de Mercado de Balcão.

Prezados Senhores,

A Lei 11.196, de 21/11/2005, em seu artigo 110, parágrafo 2º, estabeleceu que, para apuração da base de cálculo dos impostos federais, *“quando a operação for realizada no mercado de balcão, somente será admitido o reconhecimento de despesas ou de perdas se a operação tiver sido registrada em sistema que disponha de critérios para aferir se os preços, na abertura ou no encerramento da posição, são consistentes com os preços de mercado”*.

Por meio deste Ofício Circular e de seu anexo, apresentamos os novos critérios estabelecidos para registro de operações de balcão – *swaps* e opções flexíveis –, informando que a BM&F poderá, a qualquer tempo, modificar tais critérios. Salientamos, porém, que a Bolsa poderá aceitar operações na eventualidade de preços ou taxas diferentes daqueles determinados pelos critérios, caso haja justificativa por escrito das partes intervenientes e esta seja considerada plausível pela BM&F, a seu critério.

Os critérios, os parâmetros e os limites ora definidos atingem tanto as operações com garantia da BM&F quanto aquelas sem garantia.

Para efeito deste Ofício, os códigos utilizados na definição das variáveis são os seguintes:

- PRE = taxa de juro prefixada;
- DI1 = Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia;
- TR = Taxa Referencial;

Bolsa de Mercadorias & Futuros

Praça Antonio Prado, 48 – Telefone 3119-2000 – CEP 01010-901 – São Paulo – SP
Caixa Postal 4275 – CEP 01061-970 – São Paulo – SP



016/2006-DG

.2.

- OZ1 = preço do ouro;
- SEL = taxa Selic;
- TBF = Taxa Básica Financeira;
- ANB = taxa Anbid;
- IND = Ibovespa;
- TJL = Taxa de Juro de Longo Prazo
- IBR = índice de ações IBrX-50;
- SB1 = carteira de ações (*stock basket*);
- SB2 = carteira de ações (*stock basket*);
- DOL = taxa de câmbio reais por dólares dos Estados Unidos;
- REU = taxa de câmbio reais por euro;
- JPY = taxa de câmbio reais por iene;
- IGM = índice de inflação IGP-M;
- IGD = índice de inflação IGP-DI;
- IPC = índice de inflação IPC da FIPE;
- INP = índice de inflação INPC do IBGE;
- IAP = índice de inflação IPCA.

1. Limites para os Contratos a Termo de Troca de Rentabilidade – *Swaps*

a) Variável PRE quando combinada com as variáveis DI, TR, OZ1, SEL, TBF, ANB, IND, TJL e IBR

- i) 10% ou 200 *basis points* sobre a taxa de mercado de abertura do dia:
 - Limite superior: +10% ou 200 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -10% ou 200 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia.
- ii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.
- iii) Quando a operação incluir um percentual sobre a taxa diária das variáveis DI1 ou SEL, esse percentual também será considerado na avaliação dos limites.

b) Variável PRE e SB1 quando combinada com as variáveis DOL, REU e JPY

- i) Com informação da taxa de câmbio de partida:
 - i.1) 1% sobre a cotação referencial intermediária para a taxa de câmbio divulgada pelo BACEN, conforme segue:

Bolsa de Mercadorias & Futuros

Praça Antonio Prado, 48 – Telefone 3119-2000 – CEP 01010-901 – São Paulo – SP
Caixa Postal 4275 – CEP 01061-970 – São Paulo – SP



- Limite superior: -1% sobre a cotação referencial intermediária caracterizada como mínima do dia até o momento de registro;
 - Limite inferior: +1% sobre a cotação referencial intermediária caracterizada como máxima do dia até o momento de registro;
 - i.2) 30% ou 100 *basis points* sobre a taxa das operações DOL x PRE de abertura do dia:
 - Limite superior: +30% ou 100 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -30% ou 100 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - ii) Com a cotação PTAX do dia anterior como taxa de câmbio de partida:
 - ii.1) 2% sobre a cotação PTAX do BACEN, conforme segue:
 - Limite superior: -2% sobre a cotação PTAX do dia anterior ao de registro;
 - Limite inferior: +2% sobre a cotação PTAX do dia anterior ao de registro;
 - ii.2) 30% ou 100 *basis points* sobre a taxa das operações DOL x PRE de abertura do dia:
 - Limite superior: +30% ou 100 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -30% ou 100 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia.
 - iii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.
- c) Variáveis PRE e DII quando combinadas com as variáveis IGM, IGD, IPC, INP e IAP
- i) 20% ou 400 *basis points* sobre a taxa de mercado de abertura do dia:
 - Limite superior: +20% ou 400 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -20% ou 400 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia.
 - ii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.



d) Variável DI1 quando combinada com as variáveis TR, OZ1, SEL, TBF, ANB, IND, TJL e IBR

- i) 10% ou 200 *basis points* sobre a taxa de mercado de abertura do dia:**
- Limite superior: +10% ou 200 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -10% ou 200 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia.
- ii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.**

e) Variáveis DI1 e SEL quando combinadas com as variáveis DOL, REU e JPY

- i) Com informação da taxa de câmbio de partida:**
- i.1) 1% sobre a cotação referencial intermediária para taxa de câmbio divulgada pelo BACEN, conforme segue:**
- Limite superior: -1% sobre a cotação referencial intermediária caracterizada como mínima do dia até o momento de registro;
 - Limite inferior: +1% sobre a cotação referencial intermediária caracterizada como máxima do dia até o momento de registro;
- i.2) 30% ou 100 *basis points* sobre o cupom limpo de abertura do dia:**
- Limite superior: +30% ou 100 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -30% ou 100 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
- ii) Com a cotação PTAX do dia anterior como taxa de câmbio de partida:**
- ii.1) 2% sobre a cotação PTAX do BACEN referente ao dia anterior, conforme segue:**
- Limite superior: -2% sobre a cotação PTAX do dia anterior ao de registro;
 - Limite inferior: +2% sobre a cotação PTAX do dia anterior ao do registro;
- ii.2) 30% ou 100 *basis points* sobre o cupom limpo de abertura do dia:**



- Limite superior: +30% ou 100 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -30% ou 100 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
- iii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.

f) Variável SB2 combinada com SB1

- i) 1.000 *basis points* sobre o cupom da variável:
- Limite superior: cupom da variável + 1.000 *basis points*;
 - Limite inferior: cupom da variável - 1.000 *basis points*.
- ii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.

g) Demais combinações de variáveis

- i) 20% ou 400 *basis points* sobre a taxa de mercado de abertura do dia:
- Limite superior: +20% ou 400 *basis points*, dos dois o maior, sobre a taxa de mercado de abertura do dia;
 - Limite inferior: -20% ou 400 *basis points*, dos dois o menor, sobre a taxa de mercado de abertura do dia.
- ii) A Bolsa poderá alterar a taxa de mercado tomada como referência se for observada volatilidade que, a seu critério, justifique tal medida.

2. As operações registradas com os Contratos de Opções Flexíveis de Compra e de Venda sobre Ibovespa, Índice de Taxa de Juro *Spot* ou Taxa de Câmbio de Reais por Dólar dos Estados Unidos terão os parâmetros de limites mínimo e máximo para prêmios, preços de exercício, preços de barreira de acordo com os Ofícios Circulares 143/2002-DG, de 25/10/2002, 045/2005-DG, de 11/04/2005, e 169/2005-DG, de 29/12/2005, sendo as fórmulas de cálculo empregadas nos cálculos conforme mostrado a seguir.

a) Para fixação dos preços de exercício e de barreira

a.1) Opções flexíveis sobre dólar

i) Opção de compra

$X_{\text{mínimo}} = 70\%$ da taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, cotação intermediária de abertura,



divulgada pelo BACEN na data da operação e corrigida pela taxa de cupom cambial estabelecida pela BM&F:

$$X_{\text{mínimo}} = S_{\text{dol}} \times \left(1 + \frac{c \times n}{36.000}\right) \times 0,7$$

$$X_{\text{máximo}} = S_{\text{dol}} \times \left(1 + \frac{c \times n}{36.000}\right) \times (FV + 1), \text{ onde:}$$

$$FV = \left(\frac{\sigma_{\text{dol}}}{100} \times \sqrt{\frac{n}{360}}\right)$$

$$X < B > S_{\text{dol}}$$

ii) Opção de venda

$$X_{\text{mínimo}} = S_{\text{dol}} \times \left(1 + \frac{c \times n}{36.000}\right) \times \frac{1}{(FV + 1)}$$

$X_{\text{máximo}} = 130\%$ da taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, cotação intermediária de abertura, divulgada pelo BACEN na data da operação e corrigida pela taxa de cupom cambial estabelecida pela BM&F:

$$X_{\text{máximo}} = S_{\text{dol}} \times \left(1 + \frac{c \times n}{36.000}\right) \times 1,3$$

$$X > B < S_{\text{dol}}$$

a.2) Opções flexíveis sobre Ibovespa

i) Opção de compra

$X_{\text{mínimo}} = 70\%$ do valor de abertura do Ibovespa a vista corrigido pela taxa de juro prefixada estabelecida pela BM&F:

$$X_{\text{mínimo}} = S_{\text{ind}} \times \left[\left(1 + \frac{\text{Pré}}{100}\right)^{\frac{n}{252}} \right] \times 0,7$$

$$X_{\text{máximo}} = S_{\text{ind}} \times \left[\left(1 + \frac{\text{Pré}}{100}\right)^{\frac{n}{252}} \right] \times (FV + 1), \text{ onde:}$$



$$FV = \left(\frac{\sigma_{ind}}{100} \times \sqrt{\frac{n}{360}} \right)$$

$$X < B > S_{ind}$$

ii) Opção de venda

$$X_{mínimo} = S_{ind} \times \left[\left(1 + \frac{Pré}{100} \right)^{n/252} \right] \times \frac{1}{(FV + 1)}$$

$X_{máximo}$ = 130% do valor de abertura do Ibovespa a vista corrigido pela taxa de juro prefixada estabelecida pela BM&F:

$$X_{máximo} = S_{ind} \times \left[\left(1 + \frac{Pré}{100} \right)^{n/252} \right] \times 1,3$$

$$X > B < S_{ind}$$

a.3) Opções flexíveis sobre taxa de juro spot

i) Opções de compra e de venda

$$X_{mínimo} = S_{jur} \times \left[\left(1 + \frac{Pré}{100} - \epsilon_{LI} \right)^{n/252} \right]$$

$$X_{máximo} = S_{jur} \times \left[\left(1 + \frac{Pré}{100} + \epsilon_{LS} \right)^{n/252} \right]$$

Onde:

$X_{mínimo}$ = preço de exercício mínimo calculado;

$X_{máximo}$ = preço de exercício máximo calculado;

S_{dol} = taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos da América, cotação intermediária de abertura, divulgada pelo Banco Central do Brasil na data da operação;

c = cupom cambial, expresso em taxa linear ao ano, estabelecido pela BM&F;

n = número de dias corridos compreendidos entre a data da operação, inclusive, e a data de vencimento exclusive;



- σ = volatilidade, expressa em percentual ao ano, para efeito de determinação dos limites máximo e mínimo de preços de exercício;
- B = preço de barreira da operação;
- S_{ind} = valor de abertura do Ibovespa a vista na data da operação;
- $Pré$ = taxa de juro prefixada efetiva ao ano, base 252 dias úteis, estabelecida pela BM&F;
- u = número de saques-reserva compreendidos entre a data da operação, inclusive, e a data de vencimento, exclusive;
- S_{jur} = valor do índice de taxa de juro *spot* na data da operação;
- ϵ_{LI} = choque sobre a curva de taxa de juro prefixada, em pontos-base, para determinação do limite mínimo de preço de exercício;
- ϵ_{LS} = choque sobre a curva de taxa de juro prefixada, em pontos-base, para determinação do limite máximo de preço de exercício.

Parâmetros de limites de preço de exercício

Ativo	Volatilidade (σ)	Juro (<i>Pré</i>)	$\epsilon_{LI}/\epsilon_{LS}$
Dólar	70	15	-
Ibovespa	70	22	-
Índice de juro	-	-	-500/+500

A BM&F poderá alterar esses valores, bem como os demais parâmetros, a qualquer tempo, a seu critério.

b) Limites mínimo e máximo para prêmios

b.1) Critérios para a determinação dos parâmetros utilizados no cálculo dos limites mínimos e máximos dos prêmios.

i) Volatilidade (σ)

Será utilizada a estrutura a termo do *smile* de volatilidade. A BM&F calculará diariamente o *smile* de volatilidade das opções flexíveis sobre dólar, Ibovespa e taxa de juro *spot*. Com base na análise das variações históricas de um dia do *smile*, a este serão aplicados dois “choques/deslocamentos”, sendo um de alta e outro de baixa. O choque de baixa gerará o *smile* de volatilidade mínima e o choque de alta, o *smile* de volatilidade máxima.



A BM&F divulgará diariamente os *smiles* mínimo e máximo em seu *website*.

A BM&F poderá, a qualquer tempo e sempre que considerar necessário, alterar os valores do *smiles* mínimo e máximo, para mais e/ou para menos, sem necessidade de aviso prévio ao mercado.

ii) Preço do ativo-objeto (S)

Os preços mínimo e máximo do ativo-objeto, para efeito de cálculo dos limites de prêmio das opções, serão apurados sempre em intervalos de tempo. Em virtude de o registro das operações ocorrer em momento posterior ao de sua realização, o preço a vista observado no momento de registro pode diferir daquele observado no momento de fechamento do negócio. Por essa razão e para que não ocorra a rejeição indevida de operações submetidas à Clearing de Derivativos, o cálculo dos limites de preço levará em conta os preços mínimo e máximo verificados durante as duas horas que antecederem o registro da operação. No caso específico das operações que forem registradas nas duas primeiras horas depois da abertura do sistema de registro, serão observados os preços mínimo e máximo desde a abertura do dia até o momento de registro.

ii.1) Dólar e Ibovespa

S_{min} = valor mínimo atingido pelo preço a vista da variável do ativo-objeto durante o intervalo estabelecido pela Bolsa na data da operação;

S_{max} = valor máximo atingido pelo preço a vista da variável do ativo-objeto durante o intervalo estabelecido pela Bolsa na data da operação.

ii.2) Taxa de juro *spot*

S_{min} = cotação mínima da taxa de juro, para o prazo a decorrer da opção, calculada com base nas taxas de juro praticadas no Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia



durante o intervalo estabelecido pela Bolsa na data da operação;

$S_{máx}$ = cotação máxima da taxa de juro, para o prazo a decorrer da opção, calculada com base nas taxas de juro praticadas no Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia durante o intervalo estabelecido pela Bolsa na data da operação.

Adicionalmente, esses preços mínimo e máximo para a opção sobre taxa de juro *spot* poderão ser ampliados por meio da subtração do parâmetro ε_- (cotação mínima) e da adição do parâmetro ε_+ (cotação máxima).

O parâmetro de cálculo ε é de 10 pontos-base, podendo ser alterado pela BM&F a qualquer momento, a seu critério.

iii) Operações de *box*

O procedimento utilizado para o cálculo dos limites mínimo e máximo de preço de negociação para as operações de *box* (estratégias com opções que resultam em rendimento predeterminado) envolverá o cálculo dos limites de preços para cada uma das opções da estratégia e a taxa prefixada referente ao *box*, que deverá estar dentro dos limites mínimo e máximo estabelecidos pela BM&F para esse tipo de operação.

Taxa mínima = $Pré - \varepsilon_1$

Taxa máxima = $Pré + \varepsilon_2$

onde:

$Pré$ = taxa de juro prefixada de fechamento do dia anterior (taxa referencial BM&F), correspondente ao prazo de vencimento da operação de *box*;

ε_i = parâmetro estabelecido e divulgado pela BM&F, podendo ser diferenciado por prazo e alterado a qualquer momento, sem necessidade de aviso prévio ao mercado, inicialmente será fixado em 150 pontos-base.



Na hipótese de aumento da volatilidade da taxa de juro, a BM&F poderá calcular taxas mínima e máxima das operações de *box* com base na curva de taxa de juro prefixada verificada no dia da operação, em substituição à curva de fechamento do dia anterior.

b.2) Determinação dos valores dos limites

Os limites mínimo e máximo de preço das opções flexíveis serão dados em função dos parâmetros preço do ativo-objeto, taxa de juro e volatilidade $f(S, r, \sigma)$.

A metodologia de cálculo empregada na determinação dos limites mínimo e máximo dos prêmios encontra-se especificada no Anexo I deste Ofício.

Voltamos a destacar que a BM&F poderá aceitar, a seu critério, o registro de operações fora dos limites definidos, mediante solicitação formal das partes envolvidas e demonstração do modelo de apreçamento adotado, bem como de todos os parâmetros utilizados.

Esclarecimentos adicionais poderão ser obtidos com as Diretorias Técnica e de Planejamento (Marco Aurélio e Álvaro) e da Câmara de Derivativos (Cícero, António Marcos e Radislau) e com o Escritório Rio (Galvão).

Atenciosamente,



Edemir Pinto
Diretor Geral



Anexo ao Ofício Circular 016/2006-DG

OPÇÕES FLEXÍVEIS – MODELOS TEÓRICOS PARA APREÇAMENTO DE OPERAÇÕES

Este anexo tem o objetivo de descrever os modelos teóricos empregados pela Clearing de Derivativos BM&F no apreçamento das operações com opções flexíveis a ela submetidas. O anexo é de natureza técnica, procurando conferir a máxima transparência possível aos critérios utilizados na definição dos limites de preço.

O anexo foi dividido em duas partes. A primeira descreve as fórmulas de apreçamento para opções europeias e a segunda, os modelos de árvore binomial para opções americanas.

1. Fórmula para Apreçamento de Opções Europeias com Barreira

As fórmulas a seguir referem-se ao modelo de apreçamento desenvolvido por Merton (1973) e Reiner e Rubinstein (1991), reproduzidas em Haug (1998).

Primeiramente, são definidas as fórmulas de variáveis auxiliares que compõem o modelo:

$$\begin{aligned} A &= \phi \times S \times e^{(b-r)T} N(\phi \times x_1) - \phi \times X \times e^{-rT} N(\phi \times x_1 - \phi \times \sigma \times \sqrt{T}) \\ B &= \phi \times S \times e^{(b-r)T} N(\phi \times x_2) - \phi \times X \times e^{-rT} N(\phi \times x_2 - \phi \times \sigma \times \sqrt{T}) \\ C &= \phi \times S \times e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(\eta \times y_1) - \phi \times X \times e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(\eta \times y_1 - \eta \times \sigma \times \sqrt{T}) \\ D &= \phi \times S \times e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(\eta \times y_2) - \phi \times X \times e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(\eta \times y_2 - \eta \times \sigma \times \sqrt{T}) \\ E &= Ke^{-rT} \left[N(\eta \times x_2 - \eta \times \sigma \times \sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(\eta \times y_2 - \eta \times \sigma \times \sqrt{T}) \right] \\ F &= K \left[(H/S)^{\mu+\lambda} N(\eta \times z) + (H/S)^{\mu-\lambda} (\eta \times z - 2 \times \eta \times \lambda \times \sigma \times \sqrt{T}) \right] \end{aligned}$$

onde:

- S = preço do ativo-objeto;
- b = custo de carregamento;
- r = taxa de juro livre de risco;
- T = prazo para o vencimento;



$$x_1 = \frac{\ln(S/X)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T};$$

X = preço de exercício da opção;

σ = volatilidade do ativo-objeto;

$$x_2 = \frac{\ln(S/H)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T};$$

H = preço de barreira (*knock-in* ou *knock-out*);

$$\mu = \frac{b - \sigma^2/2}{\sigma^2};$$

$$y_1 = \frac{\ln(H^2/SX)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T};$$

$$y_2 = \frac{\ln(H/S)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T};$$

K = preço de rebate;

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \frac{2r}{\sigma^2}};$$

$$z = \frac{\ln(H/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

1.1 Barreiras do tipo *knock-in*

Nas opções com cláusula de *knock-in*, o direito de exercício passa a existir somente se o preço do ativo-objeto, S , atingir o preço de barreira, H , antes da data de vencimento, T . Existe a possibilidade de se incluir prêmio de compensação ou rebate, K , que será pago na data de vencimento caso a barreira *knock-in* não seja alcançada durante a existência da opção.

As opções com *knock-in* podem ser classificadas como *in-and-down* ($S > H$) e *in-and-up* ($S < H$). O *payoff* e o prêmio dessas opções são obtidos conforme demonstrado a seguir.

- *Knock-in-and-down*



Indica que o preço do ativo-objeto na data de lançamento da opção está acima do preço de barreira, ou seja, $S > H$. O *payoff* da opção é dado por:

Call: *payoff* = $\max(S - X; 0)$ se $S \leq H$ antes do vencimento T e *payoff* = K (rebate) caso contrário;

Put: *payoff* = $\max(X - S; 0)$ se $S \leq H$ antes do vencimento T e *payoff* = K (rebate) caso contrário.

As fórmulas de cálculo do prêmio dessas opções são obtidas por meio da combinação das variáveis A, B, C, D, E e F anteriormente definidas:

$call_{in-and-down}(X > H) = C + E$	$\eta = 1, \phi = 1$
$call_{in-and-down}(X < H) = A - B + D + E$	$\eta = 1, \phi = 1$
$put_{in-and-down}(X > H) = B - C + D + E$	$\eta = 1, \phi = -1$
$put_{in-and-down}(X < H) = A + E$	$\eta = 1, \phi = -1$

▪ **Knock-in-and-up**

Indica que o preço do ativo-objeto na data de lançamento da opção está abaixo do preço de barreira, ou seja, $S < H$. O *payoff* da opção é dado por:

Call: *payoff* = $\max(S - X; 0)$ se $S \geq H$ antes do vencimento T e *payoff* = K (rebate) caso contrário;

Put: *payoff* = $\max(X - S; 0)$ se $S \geq H$ antes do vencimento T e *payoff* = K (rebate) caso contrário.

As fórmulas de cálculo do prêmio são dadas por:

$call_{in-and-up}(X > H) = A + E$	$\eta = -1, \phi = 1$
$call_{in-and-up}(X < H) = B - C + D + E$	$\eta = -1, \phi = 1$
$put_{in-and-up}(X > H) = A - B + D + E$	$\eta = -1, \phi = -1$
$put_{in-and-up}(X < H) = C + E$	$\eta = -1, \phi = -1$



2.2 Barreiras do tipo *knock-out*

As opções com cláusula de *knock-out* são semelhantes às tradicionais, exceto pelo fato de as primeiras deixarem de existir caso o preço do ativo-objeto, S , atinja a barreira *knock-out*, H , antes da data de vencimento, T . Similarmente às *knock-in*, existe a prerrogativa do rebate, K , o qual será pago se a opção deixar de existir antes da data de vencimento. A barreira *knock-out* pode ser do tipo *out-and-down* ou *out-and-up*. O *payoff* e o prêmio são calculados segundo as fórmulas a seguir.

▪ *Knock-out-and-down*

Indica que o preço do ativo-objeto na data de lançamento da opção está acima do preço de barreira, ou seja, $S > H$. O *payoff* será:

Call: $\text{payoff} = \max(S - X; 0)$ se $S \geq H$ antes do vencimento T e $\text{payoff} = K$ (rebate) caso contrário;

Put: $\text{payoff} = \max(X - S; 0)$ se $S \geq H$ antes do vencimento T e $\text{payoff} = K$ (rebate) caso contrário.

As fórmulas de cálculo do prêmio são dadas por:

$$\text{call}_{\text{out-and-down}(X>H)} = A - C + F \quad \eta = 1, \phi = 1$$

$$\text{call}_{\text{out-and-down}(X<H)} = B - D + F \quad \eta = 1, \phi = 1$$

$$\text{put}_{\text{out-and-down}(X>H)} = A - B + C - D + F \quad \eta = 1, \phi = -1$$

$$\text{put}_{\text{out-and-down}(X<H)} = F \quad \eta = 1, \phi = -1$$

▪ *Knock-out-and-up*

Indica que o preço do ativo-objeto na data de lançamento da opção está abaixo do preço de barreira, ou seja, $S < H$. O *payoff* será dado por:

Call: $\text{payoff} = \max(S - X; 0)$ se $S < H$ antes do vencimento T e $\text{payoff} = K$ (rebate) caso contrário;

Put: $\text{payoff} = \max(X - S; 0)$ se $S < H$ antes do vencimento T e $\text{payoff} = K$ (rebate) caso contrário.

As fórmulas de cálculo do prêmio são dadas por:

A handwritten signature in black ink, located in the bottom right corner of the page.



$$\begin{aligned}
 call_{out-and-up}(X>H) &= F & \eta = -1, \phi = 1 \\
 call_{out-and-up}(X<H) &= A - B + C - D + F & \eta = -1, \phi = 1 \\
 put_{out-and-up}(X>H) &= B - D + F & \eta = -1, \phi = -1 \\
 put_{out-and-up}(X<H) &= A - C + F & \eta = -1, \phi = -1
 \end{aligned}$$

2. Modelos para Precificação de Opções Americanas com Barreira

O modelo utilizado na precificação de opções americanas é o de árvores binomiais, desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (1979). Na abordagem por eles proposta, as variações sofridas pelo preço do ativo-objeto a cada instante são dadas por:

$$\text{Variação up} = u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\text{Variação down} = d = \frac{1}{u}$$

onde:

σ = volatilidade do ativo-objeto;

Δt = período de tempo compreendido entre dois instantes consecutivos da árvore binomial.

Além disso, a probabilidade de o preço sofrer a variação u é dada por P e a probabilidade de sofrer a variação d é dada por $(1 - P)$, onde:

$$P = \frac{e^{r\sqrt{\Delta t}} - d}{u - d}$$

r = taxa de juro livre de risco.

A seguir, considera-se uma árvore binomial com n passos, sendo $x(i, j)$ o valor da variável x no instante i e no estado da natureza j .

2.1 Barreiras simples (*cap* ou *floor*)

- *Call*

O valor da *call* no instante final $i = n$, em cada um dos estados da natureza j , é dado por:



$$c_{i,j} = \max \left[0; \min \left(S_{i,j} - X; H - X \right) \right]$$

Nos instantes intermediários ($i < n$), o valor da *call* é dado por:

$$c_{i,j} = \max \left\{ e^{-r\Delta} \times \left[P \times c_{i+1,j+1} + (1-P) \times c_{n+1,j} \right]; \min \left(S_{n,m} - X; H - X \right) \right\}$$

▪ *Put*

O valor da *put* no instante final $i = n$, em cada um dos estados da natureza j , é dado por:

$$p_{i,j} = \max \left[0; \min \left(X - S_{i,j}; X - H \right) \right]$$

Nos instantes intermediários ($i < n$), o valor da *put* é dado por:

$$p_{i,j} = \max \left\{ e^{-r\Delta} \times \left[P \times p_{i+1,j+1} + (1-P) \times p_{n+1,j} \right]; \min \left(X - S_{i,j}; X - H \right) \right\}$$

2.2 Barreiras do tipo *knock-out*

Conforme mencionado anteriormente, as opções com barreira do tipo *knock-out* deixam de existir quando o preço do ativo-objeto alcança a barreira. Assim, a precificação dessas opções em cada nó envolve a verificação de a barreira ter sido ou não atingida, retornando valor “zero” em caso afirmativo¹. Tal procedimento é executado da seguinte forma:

se a barreira for *knock-out-and-up* ($S_0 < H$), define-se a variável $x = 1$; no caso de *knock-out-and-down*, define-se $x = -1$.

▪ *Call*

O valor da *call* no instante final $i = n$, em cada um dos estados da natureza j , é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $c_{i,j} = K$

¹ Caso a opção envolva rebate, o detentor da posição receberá o valor presente (K) quando a barreira for atingida. Nesse caso, o prêmio da opção valerá K , em vez de zero.



Do contrário, $c_{i,j} = \text{máx}(0; S_{i,j} - X)$

▪ *Put*

O valor da *put* no instante final $i = n$, em cada um dos estados da natureza j , é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $p_{i,j} = K$

Do contrário, $p_{i,j} = \text{máx}(0; X - S_{i,j})$

Nos instantes intermediários ($i < n$), o valor da *put* é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida): $p_{i,j} = K$

Do contrário, $p_{i,j} = \text{máx}\left\{e^{-r\Delta t} \times [P \times p_{i+1,j+1} + (1-P) \times p_{i+1,j}]; (X - S_{i,j})\right\}$

Como é possível perceber no procedimento acima, enquanto a barreira não é atingida, a opção é precificada da mesma forma que uma opção *plain vanilla* (sem barreira).

2.3 Barreiras do tipo *knock-in*

As opções com barreira do tipo *knock-in* passam a existir depois que o preço do ativo-objeto atinge o preço de barreira. Para essas opções, a árvore binomial é construída duas vezes. A primeira árvore precifica uma opção *plain vanilla* (sem barreira), enquanto a segunda se baseia na primeira para precificar a opção com *knock-in*.

Sejam $c^*_{i,j}$ e $p^*_{i,j}$, respectivamente, os preços de uma *call* e de uma *put* sem barreira no instante i , no estado da natureza j .

Analogamente às opções com barreira do tipo *knock-out*, em cada um dos pontos intermediários da árvore, é feita a verificação do rompimento da barreira. Em caso afirmativo, o prêmio da opção naquele ponto será igual ao prêmio de uma opção *plain vanilla* (c^* ou p^*); do contrário, será dado pelo valor presente da expectativa de *payoff* no instante seguinte, conforme demonstrado nas fórmulas a seguir.



Se a barreira for *knock-in-and-up* ($S_0 < H$), define-se a variável $x = 1$; no caso de *knock-in-and-down*, define-se $x = -1$.

▪ *Call*

O valor da *call* no instante final $i = n$, em cada um dos estados da natureza j , é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $c_{i,j} = c^*_{i,j}$

Do contrário, $c_{i,j} = K$

Nos instantes intermediários ($i < n$), o valor da *call* é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $c_{i,j} = c^*_{i,j}$

Do contrário, $c_{i,j} = e^{-r\Delta t} \times [P \times c_{i+1,j+1} + (1 - P) \times c_{i+1,j}]$

▪ *Put*

O valor da *put* no instante final $i = n$, em cada um dos estados da natureza j , é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $p_{i,j} = p^*_{i,j}$

Do contrário, $p_{i,j} = K$

Nos instantes intermediários ($i < n$), o valor da *put* é dado por:

se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $p_{i,j} = p^*_{i,j}$

Do contrário, $p_{i,j} = e^{-r\Delta t} \times [P \times p_{i+1,j+1} + (1 - P) \times p_{i+1,j}]$

2.4 Barreiras do tipo *knock-out* + barreira simples

Existe a possibilidade de se incluir mais de um tipo de barreira na mesma opção. Na hipótese de se utilizarem uma barreira do tipo *knock-out* e uma barreira simples, obviamente a barreira simples



deverá ser inferior à *knock-out*, quando esta for *knock-out-and-up*, e superior, quando for *knock-out-and-down*².

A precificação dessa opção é feita utilizando-se, em conjunto, a limitação do prêmio da opção à diferença entre o preço de exercício e o preço de barreira e a verificação contínua do rompimento da barreira, como demonstrado a seguir.

Se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), $c_{i,j} = K$ e $p_{i,j} = K$

Do contrário:

$$c_{i,j} = \max \left\{ e^{-r\Delta t} \times [P \times c_{i+1,j+1} + (1-P) \times c_{i+1,j}]; \min(S_{i,j} - X; H - X) \right\}$$

$$p_{i,j} = \max \left\{ e^{-r\Delta t} \times [P \times p_{i+1,j+1} + (1-P) \times p_{i+1,j}]; \min(X - S_{i,j}; X - H) \right\}$$

2.5 Barreiras do tipo *knock-in* + barreira simples

No caso das opções com barreira do tipo *knock-in* e barreira simples, a precificação ocorre em duas etapas, como no caso das opções que possuem apenas uma barreira *knock-in*.

Na primeira etapa, calcula-se o prêmio de uma opção com barreira simples e em cada um dos pontos da árvore binomial desconsidera-se a barreira *knock-in*. Posteriormente, em nova árvore, faz-se a verificação do rompimento da barreira em cada ponto, retornando o prêmio calculado para a opção com barreira simples caso o preço de barreira seja atingido. Se isso não ocorrer, o prêmio será dado pelo valor presente do *payoff* esperado no instante seguinte, conforme demonstrado nas fórmulas a seguir.

Se $(S_{i,j} - H) \times x > 0$ (a barreira foi atingida), a opção é precificada como uma opção *plain vanilla* com barreira simples. Do contrário:

$$c_{i,j} = e^{-r\Delta t} \times [P \times c_{i+1,j+1} + (1-P) \times c_{n+1,j}]$$

$$p_{i,j} = e^{-r\Delta t} \times [P \times p_{i+1,j+1} + (1-P) \times p_{n+1,j}]$$

² De outra forma, a barreira simples nunca seria relevante, perdendo o sentido sua utilização.



Assim como no caso das opções que possuem apenas barreira *knock-in*, no último instante da árvore, se a barreira não tiver sido atingida, $(S_{i,j} - H) \times x < 0$, o prêmio da opção será igual ao valor de rebate K^3 .

Referências Bibliográficas

HAUG, E.G. *The Complete Guide to Options Pricing Formulas*. New York: McGraw-Hill, 1998.

MERTON, R.C. "Theory of Rational Option Pricing", in *Bell Journal of Economics and management Science*, 4, 141-183, 1973.

REINER, E. RUBINSTEIN M. "Breaking Down the Barriers", in *Risk Magazine* 4(8), 1991.

³ Se a opção envolver rebate. Caso contrário, o prêmio em tal ponto será zero.