M2M Escola de Negócios

MATEMÁTICA FINANCEIRA

APOSTILA 1

APOSTILA 1

Módulo 1 - Introdução à matemática financeira e aos juros

CAPÍTULO 1 – Primeiros conceitos

A matemática financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo.

Em economia, a escassez se deve ao descasamento entre a disponibilidade de recursos e os desejos dos indivíduos. Em síntese, a escassez ocorre porque bens e serviços são produzidos com recursos limitados para satisfazer desejos por vezes ilimitados.

Da escassez de recursos, decorre o conceito dos juros. Quem entrega seu capital a um terceiro, abre mão do consumo ou de algum outro tipo de benefício imediato, por isso, é natural que espere alguma recompensa em troca, e quem toma esse capital por empréstimo se compromete a pagar essa recompensa, devolvendo não só a quantia emprestada, mas também um valor extra, denominado juros. Assim, os juros podem ser entendidos como o preço a ser pago pelo uso do dinheiro.

Quando alguém aluga um apartamento na praia, por exemplo, paga um aluguel pelo benefício de usar o imóvel por um tempo. Esse pagamento é feito em função da quantidade de dias, meses ou até anos pelos quais mantém esse benefício. Por analogia, o mesmo ocorre quando alguém pega dinheiro por empréstimo. A pessoa utiliza o dinheiro por dias, meses ou anos, e paga um "aluguel" pelo uso dos recursos de forma proporcional a esse tempo.

Exercício 1: (Em vez de fazer vídeo desse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los e ter MUITA atenção à sequência de respostas)

Uma pessoa toma $ 100 emprestado pelo período de 1 mês, e ao final do período, paga $ 104 à pessoa que emprestou esse dinheiro. Pergunta-se:

a. Qual o valor de principal e de juros pagos ao final do período?

Solução: O principal é o próprio valor tomado, ou seja, $ 100, enquanto a diferença ($ 4) são os juros.

b. Se a operação tivesse prazo de 2 meses, qual deveria ser o valor dos juros, supondo que as mesmas condições do empréstimo de 1 mês fossem mantidas?

   Solução: É provável que sua resposta tenha sido $ 8, considerando que o "aluguel" do capital no primeiro mês foi $ 4 e no segundo mês também foi $ 4.
   Resposta alternativa: Você pode ter chegado a um valor maior do que $ 8, se considerou que, como os juros não foram pagos ao final do primeiro mês, também deveria pagar um "aluguel" adicional, ou seja, os juros incidentes sobre os juros não pagos no final do primeiro mês. Essa questão está totalmente relacionada ao regime de capitalização, que será estudado nesta unidade.

CAPÍTULO 2 - Taxas de Juros

Os juros costumam ser expressos como uma fração do capital inicial empregado em uma transação, em uma determinada unidade de tempo. A essa fração é dado o nome de taxa de juros. As taxas de juros geralmente são indicadas com as letras *i* ou *r* (da expressão em inglês: *interest rate*).

As taxas de juros devem ser eficientes para remunerar:

- O risco envolvido na operação, representado pela incerteza em relação ao futuro;
- A perda do poder de compra motivada pela inflação;
- O capital emprestado ou aplicado.

Exercício 2 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Uma pessoa toma $ 100 emprestado pelo período de 1 mês, e ao final do período, paga $ 104 à pessoa que emprestou esse dinheiro. Pergunta-se:

a. Qual a taxa de juros implícita na operação?

Solução: A taxa de juros é uma fração, a razão entre os juros de um período e o capital inicial, nesse caso, a relação entre os juros de $ 4 e o capital inicial de $ 100.
Matematicamente, i = 4/100 = 4% ao mês, ou 4% a.m.

MÓDULO 2 - Regimes de Capitalização

CAPÍTULO 1 - Regime de capitalização discreta

Regime de capitalização discreta é aquele em que os juros são incorporados ao capital somente ao final de um intervalo de tempo. Em finanças, os regimes de capitalização discreta usuais são o regime de capitalização simples e o regime de capitalização composta.

CAPÍTULO 2 - Regime de capitalização simples

No regime de capitalização simples, os juros são gerados exclusivamente pelo capital inicial. Nesse regime, a taxa de juros não incide sobre os juros acumulados, mas somente sobre o capital inicial. O regime de capitalização simples comporta-se como uma progressão aritmética (PA), crescendo de forma linear.

Desta forma, a taxa de juros varia de forma linear com o tempo. Uma taxa de 4% ao mês, por exemplo, equivale a uma taxa de 48% ao ano (4% x 12 meses do ano) ou de 12% ao trimestre (4% x 3 meses do trimestre).

Na capitalização por juros simples o valor dos juros é calculado a partir da seguinte expressão:

$J = C \times i \times n$

Onde:

J = valor dos juros expresso em unidades monetárias;

C = capital. É o valor representativo de determinado momento;

i = taxa de juros, expressa em sua forma unitária;

n = prazo.

Exercício 3 – Exercício resolvido (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Um empréstimo tomado a uma taxa linear de 10% a.a. poderia ser pago após 1 ano, 2 anos ou 3 anos. Quais seriam os valores a pagar, nos três prazos possíveis?

Solução:

Valor a pagar, se pagar após 1 ano	1.000,00 x (1 + 1 x 0,10) = 1.100,00
Valor a pagar, se pagar após 2 anos	1.000,00 x (1 + 2 x 0,10) = 1.200,00
Valor a pagar, se pagar após 3 anos	1.000,00 x (1 + 3 x 0,10) = 1.300,00

Exercício 4 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Uma aplicação de $ 200.000,00, rendendo a uma taxa de juros de 2,00% a.m. produz, ao final de determinado período, juros no valor de $ 20.000,00. Qual o prazo da aplicação?

Solução: n = J / (C x i) = 20.000,00 / (200.000,00 x 0,02) = 5

Exercício 5 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Uma pessoa aplica $ 10.000,00 à taxa de 0,5% a.m. durante 6 meses. Qual o valor acumulado ao final deste período?

Solução:

Montante (M) = Capital (C) + Juros (J)

M = C + C x i x n = C x (1 + i x n)

= 10.000,00 x (1 + 0,005 x 6)

= 10.000,00 x (1 + 0,03)

= 10.300,00

CAPÍTULO 3 - Capitalização simples na HP 12c

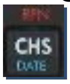
A HP 12c calcula juros simples com base em um período de 360 ou 365 dias. Além disso, com o juro acumulado no visor, a quantia total pode ser calculada (principal somado ao juro acumulado) pressionando 

.

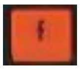
Para calcular os juros simples em um período de 360 ou 365 dias:

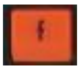
1. Para informar o período, digite um número de dias e pressione 

.
2. Para informar a taxa de juros, digite uma taxa anual e pressione 

.
3. O capital, ou valor presente (PV) precisa ter sinal inverso do montante, ou valor futuro, FV, pois a HP 12c interpreta os valores monetários como fluxos de caixa positivos ou negativos. Insira o capital digitando o seu valor e, em seguida, 

.
4. Pressione:

- 

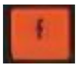
para calcular e exibir o juro acumulado para um ano comercial, de 360 dias.
- 

para calcular e exibir o juro acumulado em um período de 365 dias.

5. Pressione 

para calcular o montante (total do principal + juro acumulado).

Os valores de n, i e PV podem ser inseridos em qualquer ordem.

Note que a tecla 

é utilizada para chamar as funções que estão escritas na cor laranja nas teclas da sua HP 12c.

Exercício 6 (propor esse exercício no próprio vídeo do capítulo)

Vamos testar a HP 12c a partir dos dados do exercício 4. Considere uma aplicação de $ 200.000,00, a uma taxa de 24% a.a. por um período de 150 dias e calcule os juros e o montante obtidos na operação. Esses valores devem bater com os que já foram mencionados no exercício 4.

CAPÍTULO 4 - Regime de capitalização composta

O regime de capitalização composta (ou exponencial) incorpora ao capital os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior. É um comportamento equivalente a uma progressão geométrica (PG), no qual os juros incidem sobre o saldo apurado no início do período correspondente.

No regime de juros compostos, os juros são capitalizados, produzindo juros sobre juros periodicamente. Para facilitar a familiarização com as calculadoras financeiras e softwares, vamos adotar as seguintes terminologias ao trabalhar com juros compostos:

- C = capital = PV (valor presente)
- M = montante = FV (valor futuro)

Para melhor desenvolver esse conceito e definir suas fórmulas de cálculo, admita uma aplicação de $ 1.000,00 à taxa composta de 10% a.m. e os resultados ao final de cada período:

Final mês 1: FV = 1.000,00 x (1 + 0,10) = $ 1.100,00

Final mês 2: FV = 1.000,00 x $(1 + 0{,}10)^2$ = $ 1.210,00

O montante do mês 2 pode ser decomposto da seguinte forma:

$ 1.000,00 capital aplicado

$ 100,00 juros referentes ao mês 1 ($ 1.000,00 x 10%)

$ 100,00 juros referentes ao mês 2 ($ 1.000,00 x 10%)

$ 10,00 juros sobre os juros do mês 1 ($ 100,00 x 10%)

Evoluindo mais um mês, teríamos:

Final mês 3: FV = 1.000,00 x $(1 + 0{,}10)^3$ = $ 1.331,00

O montante do mês 3 pode ser decomposto da seguinte forma:

$ 1.000,00 capital aplicado

$ 100,00 juros referentes ao mês 1 ($ 1.000,00 x 10%)

$ 100,00 juros referentes ao mês 2 ($ 1.000,00 x 10%)

$ 100,00 juros referentes ao mês 3 ($ 1.000,00 x 10%)

$ 10,00 juros sobre os juros do mês 1 ($ 100,00 x 10%)

$ 21,00 juros sobre os juros do mês 2 ($ 210,00 x 10%)

E, de forma análoga, poderíamos imaginar o valor futuro da aplicação após n períodos:

Final mês n: FV = 1.000,00 x $(1 + 0,10)^n$

Generalizando-se, temos: FV = PV x $(1 + i)^n$

Exercício 7 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Se uma pessoa deseja obter $ 33.000,00 dentro de um ano, quanto deverá depositar hoje numa alternativa de investimento que rende 2,00% de juros compostos ao mês?

Resposta: PV = FV / $(1 + i)^n$ = 33.000,00 / $(1 + 0,02)^{12}$ = $ 26.020,27

Exercício 8 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Qual o valor de resgate de uma aplicação de $ 10.000,00 em um título pelo prazo de 12 meses à taxa de juros composta de 1,00% a.m.?

Resposta: FV = PV x $(1 + i)^n$ = 10.000,00 x $(1 + 0,01)^{12}$ = 11.268,25

Note que, quando multiplicamos um valor qualquer pela expressão $(1 + i)^n$, estamos levando esse valor a uma data futura, e quando dividimos um valor qualquer pela expressão $(1 + i)^n$, estamos trazendo esse valor para uma data mais recente. É por isso que a expressão é chamada de fator de capitalização ou fator de acumulação.

Exercício 9 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Calcule a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de $ 450.000,00 que produz um montante de $ 500.000,00 ao final de um trimestre.

Solução:

FV/PV = $(1 + i)^n$

500.000/450.000 = $(1 + i)^3$

1,1111 = $(1 + i)^3$

$\sqrt[3]{(1+i)^3} = \sqrt[3]{(1,1111}$

1 + i = 1,0357

I = 3,57%

Exercício 10 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Considere uma taxa anual de 15%. O que é melhor: uma aplicação com capitalização simples ou outra, com capitalização composta?

Dica: para responder à pergunta, determine um valor qualquer de aplicação e assuma três prazos de aplicação: 6 meses, 1 ano e 3 anos.

Solução:

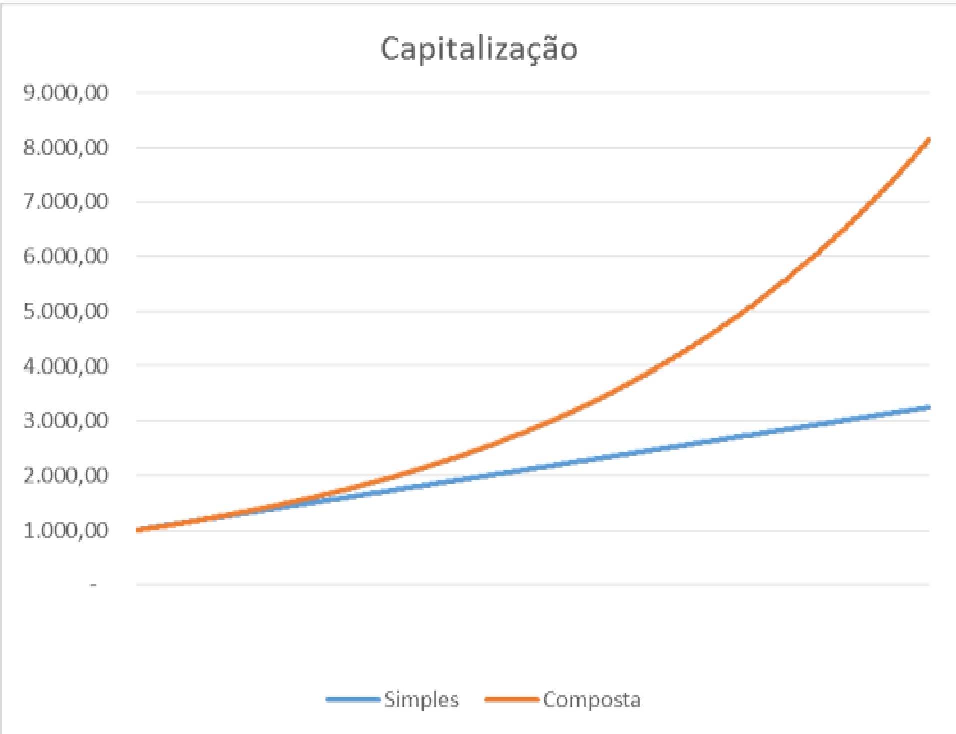
Para responder à pergunta formulada, vamos supor a aplicação do capital inicial de $ 1.000,00.

	Capitalização simples
Valor da aplicação após 6 meses	1.000,00 x (1 + 0,5 x 0,15) = 1.075,00
Valor da aplicação após 1 ano	1.000,00 x (1 + 1,0 x 0,15) = 1.150,00
Valor da aplicação após 3 anos	1.000,00 x (1 + 3,0 x 0,15) = 1.450,00

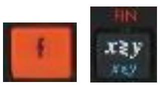
	Capitalização composta

Valor da aplicação após 6 meses	$1.000,00 \times (1 + 0,15)^{0,5} = 1.072,38$
Valor da aplicação após 1 ano	$1.000,00 \times (1 + 0,15)^{1} = 1.150,00$
Valor da aplicação após 3 anos	$1.000,00 \times (1 + 0,15)^{3} = 1.520,88$

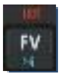
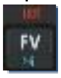
A partir da tabela acima e do gráfico a seguir é possível notar que, quando $n = 1$, os regimes de capitalização simples e composta levam ao mesmo montante. Quando $n < 1$, o regime de capitalização simples produz valores maiores, e quando $n > 1$, é o regime de capitalização composta que produz valores maiores.



CAPÍTULO 5 - Capitalização composta na HP 12c

1. Pressione  para limpar os registros financeiros. Essa é uma medida que deve ser prática do usuário da HP 12c, pois se iniciar um

cálculo sem limpar as memórias da calculadora, algum dado não desejado pode deturpar os novos cálculos.

2. Para inserir o número de pagamentos ou períodos, digite a quantidade de períodos e, em seguida, 
.
3. Insira a taxa de juros periódicos e, em seguida, 
.
4. Para calcular o valor presente de um fluxo de caixa, insira o valor futuro seguido da tecla 
, e depois pressione 
 e aguarde o cálculo.
5. Se quisesse calcular um valor futuro, o procedimento do item 4 seria substituído por: insira o valor presente seguido da tecla 
, e depois pressione 
.

Os valores de n, i, PV e FV podem ser inseridos em qualquer ordem. O usuário deve sempre inserir o valor de três variáveis e pedir que a HP 12c calcule a quarta.

Tente refazer os exercícios 7, 8 e 9 utilizando a HP 12c. Você já tem os resultados para conferir, então, sua tarefa não deve ser difícil.

MÓDULO 3 - Taxas de equivalentes, efetivas e nominais

CAPÍTULO 1 - Taxas Equivalentes

Você tem $ 100.000,00 nas mãos. Que valor você aceitaria receber daqui a 1 mês para abrir mão de $ 100.000,00 hoje?

Vamos supor que sua resposta seja $ 102.000,00. Existe uma afirmação implícita que, para você, $ 102.000,00 daqui a 1 mês equivalem a $ 100.000,00 hoje. Trata-se, portanto, de capitais equivalentes.

Considerando $ 100.000,00 como valor presente, e $ 102.000,00 como valor futuro, temos uma taxa de juros de 2% a.m., correto? Então, se a primeira pergunta fosse alterada para "qual valor você aceitaria receber daqui a 12 meses para abrir mão de $ 100.000,00 hoje?" poderíamos aplicar a mesma taxa de 2% a.m. ao capital de $ 100.000,00, obtendo um montante (valor futuro) de $ 126.824,18.

Comparando o montante obtido ao final de 12 meses ($ 126.824,18) com o capital inicial de $ 100.000,00, não é difícil visualizar que temos uma taxa de 26,82% a.a. no período (126.824,18/100.000,00 – 1). Se 100.000,00 hoje equivale a $ 102.000,00 daqui a 1 mês e a $ 126.824,18 daqui a 12 meses, também podemos dizer que a taxa de 2% a.m. é equivalente à taxa de 26,82% a.a. Vamos conferir?

Para calcular uma taxa equivalente em um período maior à taxa que temos, basta capitalizar a taxa que temos pela quantidade de períodos que equivale ao período maior. Está confuso? Vamos traduzir: Temos uma taxa de 2% a.m., e queremos transformá-la em uma taxa anual. Como 1 ano equivale a 12 períodos mensais, vamos capitalizar a taxa 12 vezes.

$$\text{Taxa que queremos} = (1 + \text{taxa que temos})^{(\text{período taxa que queremos}/\text{período taxa que temos})} - 1$$

$$\text{Taxa que queremos} = (1 + 2\%)^{12/1} - 1 = 26{,}82\%\ \text{a.a.}$$

E se fosse o contrário? Se tivéssemos a taxa de 26,82% a.a. e quiséssemos saber a taxa mensal? Será que nossa "fórmula" de transformação funciona?

Vamos fazer novamente:

$$\text{Taxa que queremos} = (1 + \text{taxa que temos})^{(\text{período taxa que queremos}/\text{período taxa que temos})} - 1$$

Só que desta vez, temos a taxa de 26,82% a.a., o período da taxa que queremos é mensal, e o da taxa que temos é anual, logo:

$$\text{Taxa que queremos} = (1 + 26{,}82\%)^{1/12} - 1 = 2{,}00\%\ \text{a.a.}$$

Puxa, funciona! Nunca é bom depender de fórmulas, então, se você esquecer esse nosso esquema, utilize a fórmula básica de juros compostos e utilize um valor fictício, como fizemos acima, com os capitais equivalentes de $ 100.000,00 e $ 102.000,00.

No regime de capitalização composta, taxas equivalentes são aquelas que são expressas em unidades de tempo diferentes, porém, quando incidem sobre um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um montante idêntico.

Exercício 12 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Calcule uma taxa anual equivalente à 5% a.m.

Solução:

Taxa que queremos = (1 + taxa que temos)$^{(\text{período taxa que queremos/ período taxa que temos})}$ -1

Taxa que queremos = (1 + 5%)$^{12/1}$ -1 = 79,6% a.a.

Exercício 13 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Calcule uma taxa semestral equivalente à taxa 60% a.a.

Solução:

Taxa que queremos = (1 + taxa que temos)$^{(\text{período taxa que queremos/ período taxa que temos})}$ -1

Taxa que queremos = (1 + 60%)$^{6/12}$ -1 = 26,49% a.s.

Exercício 14 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Calcule uma taxa anual equivalente à taxa diária de 0,0315% a.d.

Solução:

Taxa que queremos = $(1 + \text{taxa que temos})^{(\text{período taxa que queremos}/\text{período taxa que temos})} - 1$

Taxa que queremos = $(1 + 0{,}000315)^{360} - 1$ = 12,01% a.a.

Então, no regime de capitalização composta, podemos calcular taxas equivalentes capitalizando ou descapitalizando essas taxas. Se você já entendeu o que chamamos de fator de capitalização, no primeiro pré-modulo de matemática financeira, basta utiliza-lo para transformar as taxas em períodos diferentes.

No regime de capitalização simples, as taxas equivalentes são calculadas como uma proporção do período ao qual se referem essas taxas. Por exemplo, uma taxa de 12% ao ano, nesse regime, equivale a uma taxa de 6% ao semestre. No regime de capitalização simples, é mais comum chamarmos essas taxas de "proporcionais".

No regime de capitalização simples, taxas proporcionais são aquelas que são expressas em unidades de tempo diferentes, porém, quando incidem sobre um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um montante idêntico.

CAPÍTULO 2 - Taxas Efetivas (reais) e Taxas Nominais

A taxa efetiva, ou real, é aquela apurada durante todo o prazo n, sendo formada exponencialmente através dos períodos de capitalização.

Por exemplo, uma taxa de 3,8% a.m. determina um montante efetivo de juros de 56,45% a.a., ou seja:

Taxa efetiva = $(1 + 0{,}038)^{12} - 1$ = 56,44% a.a.

Por outro lado, para uma taxa de juros nominal, admite-se que o prazo de capitalização de juros não é o mesmo definido para a taxa de juros.

Por exemplo, uma taxa nominal de 36% a.a. capitalizada mensalmente. Quando se trata de taxa nominal, é comum admitir-se que a capitalização ocorre por juros proporcionais simples, ou seja, 36%/12 = 3% a.m. Ao capitalizar essa taxa nominal, apura-se uma taxa efetiva de juros superior àquela declarada na operação.

Taxa efetiva = $(1 + 0{,}36/12)^{12} - 1$ = 42,6% a.a.

Para reflexão: Ok, no exemplo anterior, a partir de uma taxa nominal de 36% a.a. chegamos em uma taxa efetiva de 42,6% a.a. Como faríamos o cálculo inverso, se tivéssemos uma taxa efetiva e quiséssemos calcular a taxa nominal?

O procedimento é simples: basta calcular taxa equivalente mensal de 42,6% a.a. e multiplica-la por 12, desta forma:

Taxa nominal = $[(1 + 0{,}426/12)^{1/12} - 1]$ x 12 = 0,03% x 12 = 36 a.a.

As taxas nominais são expressas em unidade de tempo que não coincide com o período de tempo no qual os juros são capitalizados. Como uma taxa de 12% a.a. com capitalização mensal, ou uma taxa de 2% a.m. com capitalização diária.

Exercício 15 (Em vez de fazer vídeo esse exercício, sugiro liberar a imagem dele na mesma sequência do conteúdo, e, no final do curso, criar uma seção com as respostas de cada exercício. Para isso, é fundamental numerá-los)

Uma taxa nominal de 36% a.a. é capitalizada trimestralmente. Calcule a correspondente taxa anual efetiva.

Solução:

Taxa efetiva = $(1 + 0{,}36/4)^4 - 1$ = 41,16% a.a.

O conceito de taxa efetiva também está relacionado à existência de custos de transação.

Um cliente do Banco M2M pode tomar um empréstimo de $ 1.000,00 à taxa de 20% a.a., liquidando a operação em um único pagamento de 1.200,00, após 12 meses. Nesse caso, a taxa efetiva da operação é a própria taxa nominal de 20% a.a.

Em uma situação mais próxima da realidade, o Banco M2M não entrega $ 1.000,00 ao cliente, mas desconta $ 15,00 referente a IOF. Ora, se o cliente de fato recebe $ 985, e paga $ 1.200,00 após 1 ano, sua taxa efetiva é diferente de 20%. Utilize sua HP 12c para comprovar, seguindo os passos a seguir.